

Ejercicio 1. Sea $\bar{g}$ un campo vectorial, cuyo campo de rotores es $\bar{h}$ (x, y, z))= (z−2x, y, $x^2 + y^2 + z$), y sea la superficie S = {(x, y, z)∈$\mathbb{R}^3$: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, y ≥ − 4}. Calcular la circulación de $\bar{g}$ sobre la curva C, borde de S, indicando en un gráfico la orientación asignada a C.

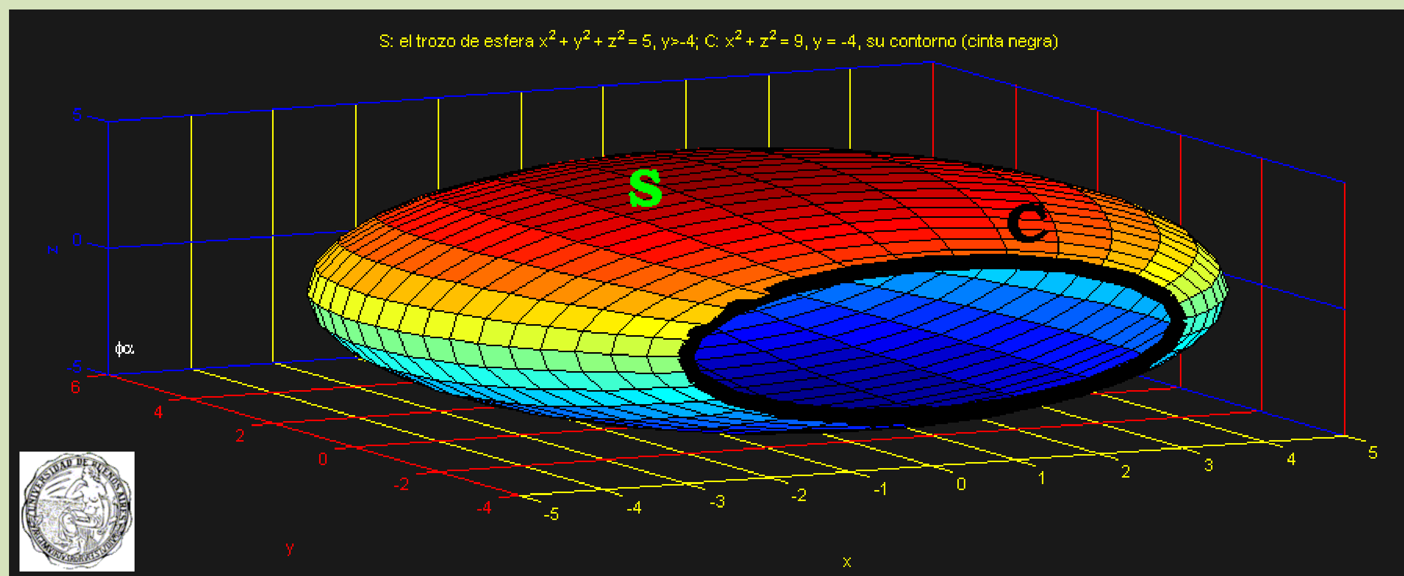


Ilustración 1. Curva C y superficie S correspondientes a los objetos geométricos del enunciado

El gráfico anterior muestra los objetos geométricos del enunciado: la superficie S y su contorno C, con una cinta negra. Dado que $\bar{g}$ es[i] $\mathcal{C}^\infty$ ($\mathbb{R}^3$), que C es un lazo simple regular, como lo prueba la parametrización[ii] $\bar{\gamma}$: [0, 2π] → $\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}$(t) = (3 cos(t), −4, 3 sen(t)), con velocidad $\bar{\gamma}'$: [0, 2π] → $\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}'$(t) = (−3 sen(t), 0, 3 cos(t)), que orienta la curva como lo indica la figura siguiente. Ahora, si definimos la superficie $S_0 \overset{\text{def}}{=}$ ={(x, y, z)∈$\mathbb{R}^3$: $x^2 + z^2 \le 9$, y = −4}, disco que puede parametrizarse en $\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=}$ [0, 3] × [0, 2π) como $S_0 = \bar{T}(\mathcal{R})$, con $\bar{T}$(r, t) = (r cos(t), −4, r sen(t)), campo de normales dado por el producto vectorial $\bar{N}(r, t) = \bar{T}_r(r, t) \times \bar{T}_t(r, t)$ = (0, −r, 0)[iii]. Con las orientaciones así planteadas[iv], e indicadas en la ilustración 2, podemos aplicar el teorema de Stokes para calcular lo pedido, cuyo valor es 36π.

$$\int_C \bar{g}\cdot d\bar{l} = \iint_{S_0} \bar{h}\cdot\check{n}\, dS = \iint_{\mathcal{R}} \bar{h}\big(\bar{T}(r,t)\big)\cdot\bar{N}(r,t)drdt = 4\iint_{\mathcal{R}} r\, dr\, dt = 4\int_0^{2\pi} dt \int_0^3 r\, dr = 36\pi$$

🔔 La anterior resolución es muy ineficiente, la parametrización del disco S_0 bien pudo evitarse, dado que se trata de la porción de un plano con versor normal inmediato (constante en todos los puntos de la superficie) y está dado por: $\check{n} = (0, -1, 0)$, de modo que, para todo punto (x, −4, z) en S_0 se tiene que $\bar{h}(x, -4, z)\cdot\check{n}(x, -4, z) = 4$, de modo que $\iint_{S_0} \bar{h}\cdot\check{n}\, dS = 4\iint_{S_0} dS = 4\, área(S) = 4(9\pi) = 36\pi$. La habilidad de escoger la mejor solución se adquiere desde la práctica, y comparando más de una resolución.

Una resolución todavía peor que la primera consiste en ignorar el Teorema del rotor, y recuperar un campo vectorial $\bar{g}$ a partir de su campo de rotores (un problema cuya solución está determinada salvo el gradiente de un campo escalar[v]): uno

---

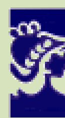
[i] Su campo de rotores es C^∞ en $\mathbb{R}^3$, de modo que debe serlo él mismo. Se dice que $\bar{g}$ es un potencial vectorial del campo de rotores $\bar{h} = \overline{\text{rot}}(\bar{g})$, lenguaje similar al utilizado cuando se dice que φ es un potencial escalar del campo vectorial de gradientes $\bar{f} = \bar{\nabla}\varphi$. También se dice que $\bar{h}$ es el rotacional de $\bar{g}$.

[ii] Es claro que $\bar{\gamma}$ es C^∞ en su dominio (sus componentes son senos y cosenos), y además si $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, esto es, si (3 cos($t_1$), −4, 3 sen($t_1$)) = (3 cos($t_2$), −4, 3 sen($t_2$))es necesariamente que cos(t_1) = cos(t_2), y sen(t_1) = sen(t_2) y de aquí es $t_1 = t_2$ a menos que difieran en 2π, lo que sólo sucede en los extremos del lazo. Además, para ningún valor de t el vector $\bar{\gamma}'$(t) = (−3 sen(t), 0, 3 cos(t)) es nulo, pues los valores que anulan la función seno no anulan la función coseno.

[iii] Es inmediato que esta parametrización es $C^\infty(\mathcal{R})$, y que la normal sólo se anula en el subconjunto H_N ={(r, t)∈ $\mathcal{R}$: r = 0}, que es de contenido nulo en $\mathcal{R}$, de modo que se trata de una parametrización regular en casi todas partes en $\mathcal{R}$. Por otra parte, la parametrización es inyectiva en casi todas partes (creo un ejercicio muy instructivo la prueba de esta afirmación, siempre que lo haga uno mismo).

[iv] Las orientaciones se hallan concordadas como lo exige el teorema de Stokes, que exige preservar la orientación del espacio introducida por la terna de referencia en la que se calcula el rotor (en toda nuestra asignatura, mantenemos el sistema dextrógiro o inglés).

[v] Puede verse en Santaló, L. (1993). *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (Décimocuarta edición ed.). Buenos Aires: Eudeba, Capítulo V, Fórmula Integrales, §23.3, p.178, teorema 4, con su demostración constructiva de uno de tales campos. También, en Apostol, T. (1980). *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty] ed., Vol. II). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona: Reverté, Capítulo 12, Integrales de superficie, §12.6 Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional, Teorema 12.5, p.547; es recomendable leer el ejemplo



de tales campos es $\bar{g}(x, y, z) = (0, x^3/3 + y^2 + zx, -x\,y + zy)$, y todo otro campo $\bar{g}^*$ es $\bar{g}^* = \bar{g} + \nabla\varphi$ para algún campo escalar φ. La integral curvilínea de $\bar{g}^*$ es igual a la de $\bar{g}$, puesto que la circulación del $\nabla\varphi$ es nula sobre C (¡es un lazo!), de modo que podemos calcular de modo directo $\int_C \bar{g} \cdot \overline{dl}$, con lo que añadiremos al cálculo ya hecho para recuperar $\bar{g}$, el de esta integral curvilínea (hacerlo, como ejercicio, para concluir que sería una muy mala elección).

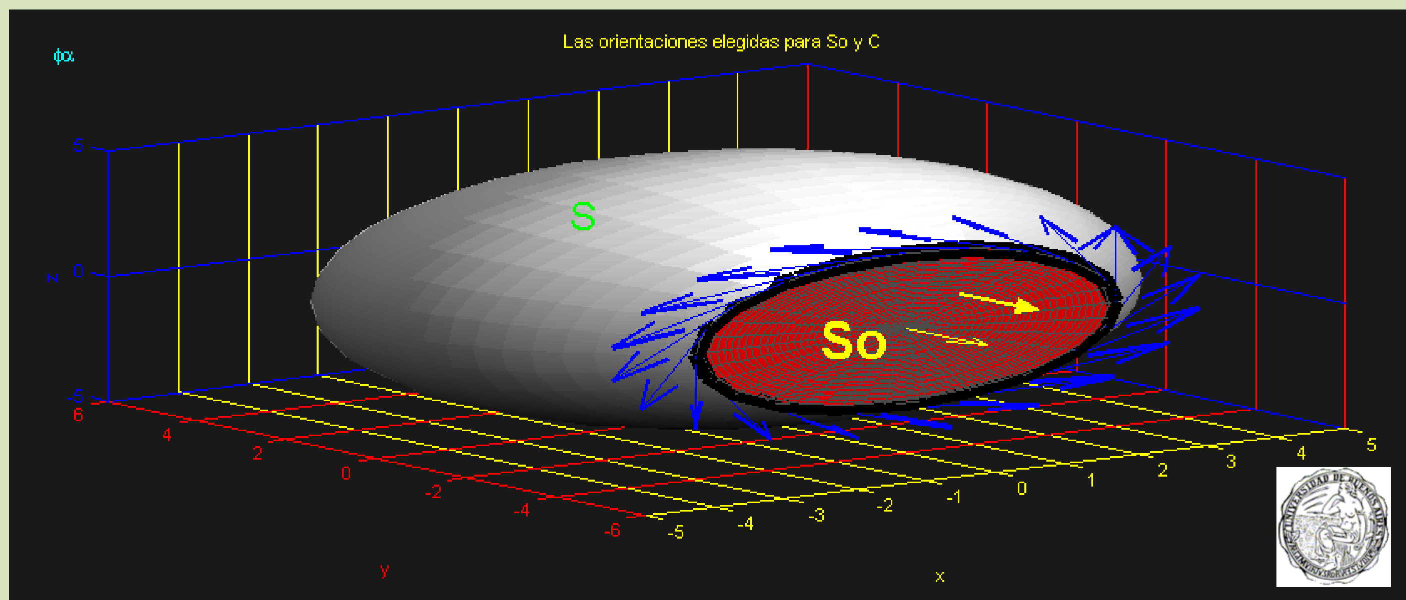


Ilustración 2. Las orientaciones adoptadas para la superficie S_0 y la curva C que es su contorno

Este comentario se origina en la observación de que, a menudo, el teorema del rotor es desperdiciado, y hasta convertido en perjudicial. La potencia del teorema proviene de que la circulación del campo sobre C iguala el flujo de su rotor sobre *cualquier* superficie suficientemente suave y orientada adecuadamente que tenga como contorno la curva C; es justamente esa la libertad que deja lugar al que enfrenta el problema, a seleccionar 'la mejor' en algún sentido que facilite las cosas. En la resolución anterior hemos utilizado el disco plano, pero no han faltado exámenes en que se ha intentado hacerlo con la superficie S, o con el casquete esférico en $y \leq -4$, lo que es una forma asegurarse serios problemas. Exagerando, podríamos imaginar una persona eligiendo (legítimamente) la superficie del siguiente gráfico: lo legítimo no coincide con lo conveniente.

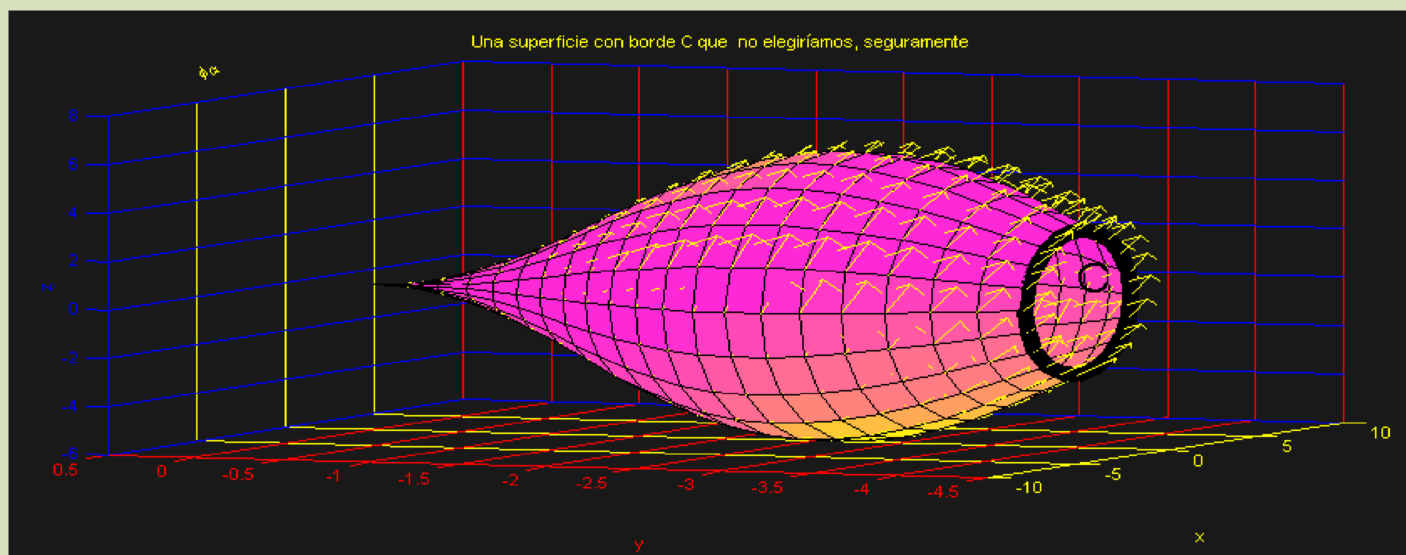
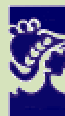


Ilustración 3. Una buena manera de convertir a Stokes en perjudicial

de un campo solenoidal que no es un rotacional, para remarcar que la condición necesaria y suficiente que enuncia el teorema se asegura en abiertos simplemente conexos. Finalmente, el mismo punto es tratado en Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (Séptima edición ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz., §91.6, c (otras relaciones), p.518.



Ejercicio 2. Sea $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ un campo escalar y $\bar{f}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ un campo vectorial solenoidal (div $\bar{f}$ idénticamente nula en su dominio), tal que para todo punto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ es $\nabla h\,(P) \perp \bar{f}(P)$. Sea $S = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\text{: } x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Probar que el flujo del campo vectorial $\bar{g}(P) \stackrel{\text{def}}{=} h(P)\ \bar{f}(P)$ a través de S es nulo.

El ejercicio resulta casi inmediato si se tiene presente la importante identidad vectorial[vi] $\nabla\cdot(h\ \bar{f}) \equiv \nabla h\cdot\ \bar{f} + h\ \nabla\cdot\ \bar{f}$, que con las hipótesis del ejercicio indica que div ($\bar{g}$) = div(h $\bar{f}$) = $\nabla\cdot(h\ \bar{f}) \equiv 0$. Siendo la superficie S una esfera, es claro que es regular y orientable, y entonces puede orientarse con normal saliente[vii]. Por otra parte, el campo vectorial $\bar{g}$, por definición, es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, dado que es el producto de un campo escalar y uno vectorial de ese grado de suavidad, por lo tanto está definido en un abierto simplemente conexo (esto es $\mathbb{R}^3$) que contiene a S y a $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\text{: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Aplicando entonces el teorema de la divergencia[viii] resulta:

$$\iint_S \left(h\bar{f}\right)\cdot\breve{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{M}} div\left(h\bar{f}\right)dV = 0$$

El cálculo anterior prueba que, efectivamente, el flujo del campo vectorial $\bar{g}$ a través de S es nulo. Resulta claro que el resultado subsiste reemplazando la esfera del enunciado por cualquier superficie S frontera de un macizo $\mathcal{M}$, dado que el argumento esencial depende del carácter solenoidal del campo que fluye a través de esa superficie, y no de la forma de S. Las identidades vectoriales señaladas en el pie de página anterior (¡21 identidades!) permiten reducir la complejidad de un problema al mínimo.

Ejercicio 3. Sea $\bar{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (x, y/2, z)$, y C la curva parametrizada por la función vectorial $\bar{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (e^t, e^{t/2}, e^t)$. (a) Comprobar que C es la línea de campo de $\bar{f}$ que pasa por $P_0 = (1, 1, 1)$. (b) Hallar el flujo de $\bar{f}$ a través del plano normal a C en P_0 en el primer octante, orientado con el campo de normales alejándose del origen de coordenadas.

(a) Siendo $\bar{f}\left(\bar{\gamma}(t)\right) = (e^t, \frac{1}{2}e^{t/2}, e^t)$, mientras que $\bar{\gamma}'(t) = (e^t, \frac{1}{2}e^{t/2}, e^t)$ es tal que $P_0 = \bar{\gamma}(0)$, resulta inmediato que vale la expresión $\bar{f}\left(\bar{\gamma}(0)\right) = \bar{f}(P_0) = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) = \bar{\gamma}'(0)$, lo que prueba lo pedido[ix].

(b) El plano normal a C en P_0 es normal al vector $N = (2, 1, 2)$ y X está en tal plano sii $(X-P_0)\cdot N = 0$, esto es que su ecuación es $2x + y + 2z = 5$. Luego la superficie S es $S = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\text{: } 2x + y + 2z = 5,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$, y el cálculo del flujo puede hacerse mediante la parametrización $\bar{T}$ en el recinto $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v)\in\mathbb{R}^2\text{: } 0\leq v\leq 5,\ 0\leq u\leq 1/2\,(5 - v)\}$, siendo $\bar{T}\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (u, v, 5/2 - u - v/2)$, con $N(u, v) = \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = (1, ½, 1)$, de modo que se tiene $S = \bar{T}(\mathcal{R})$, con la orientación pedida. De esta manera, resulta que

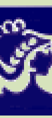
$$\iint_S \bar{f}\cdot\breve{n}\, dS = \iint_{\mathcal{R}} \bar{f}\left(\bar{T}(u,v)\right)\cdot\bar{N}(u,v)dudv = \iint_{\mathcal{R}} \left(u, \frac{v}{2}, \frac{5}{2} - u - v/2\right)\cdot\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)dudv = \frac{1}{4}\int_0^5 dv\int_0^{\frac{5-v}{2}}(10-v)du = \frac{625}{48}$$

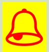
[vi] La identidad vale con $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $\bar{f}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para todo n natural (para n = 1 es la conocida expresión de la derivada de un producto, de la que esta identidad es una generalización). La prueba es inmediata, llamando D_i a la derivada respecto de la i-ésima componente,($\bar{f}$)$_i$ al i-ésimo campo escalar de $\bar{f}$, se tiene la siguiente cadena de igualdades $div(h\bar{f}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n D_i(h\bar{f})_i = \sum_{i=1}^n[D_i(h)(\bar{f})_i + h\,D_i(\bar{f})_i] = \sum_{i=1}^n D_i(h)(\bar{f})_i + \sum_{i=1}^n h\,D_i(\bar{f})_i \stackrel{\text{def}}{=} \nabla(h)\cdot\bar{f} + h\,div(\bar{f})$, la primera igualdad por definición de divergencia, la segunda por aplicación de la derivada del producto de funciones escalares, la tercera por asociatividad de la suma de funciones escalares, la cuarta por definición de gradiente, producto escalar y divergencia. En el excelente y sensato texto Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trads.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, Capítulo 3, Funciones con valores vectoriales, §3.5. Cálculo vectorial diferencial, tabla 3.1 (algunas identidades comunes en el análisis vectorial), p. 231, se encuentra esta identidad (es la número 8) junto a otras veintiuna; la identidad 8 está probada para el especial caso de $\mathbb{R}^3$ en el ejemplo 1 de la página232. Finalmente, también puede verse en Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (Séptima edición ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz, §91.6.b, expresión [91.36].

[vii] Una parametrización C^∞ en $\mathcal{R} = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ que logra $S = \bar{T}(\mathcal{R})$ es $\bar{T}(\varphi,\theta) \stackrel{\text{def}}{=} (2\,sen\,(\varphi)\cos(\theta), 2\,sen(\varphi)sen\,(\theta), 2\,cos\,(\varphi))$, que orienta S y es regular en todo $\mathcal{R}$, excepto los conjuntos $H_1 = \{(\varphi, \theta)\in\mathcal{R} : \varphi = 0\}$, $H_2 = \{(\varphi, \theta)\in\mathcal{R} : \varphi = \pi\}$, de contenido nulo en $\mathcal{R}$ y cuyas imágenes a través de $\bar{T}$ son, respectivamente, el polo norte y sur de la esfera. En tales puntos (y sólo en ellos) $\bar{T}_\varphi(\varphi,\theta)\times\bar{T}_\theta(\varphi,\theta) = 4\,sen\,(\varphi)\,(sen\,(\varphi)\cos(\theta), sen(\varphi)sen\,(\theta), cos\,(\varphi))$ es el vector nulo. Además, $\bar{T}$ es, exceptuando H_1 y H_2, inyectiva en $\mathcal{R}$ (la prueba de esta afirmación es instructiva).

[viii] Admitido conocido el resultado de que, para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, de clase C^1 en un abierto simplemente conexo que contiene a una superficie cerrada S regular por partes, simple y orientada con normal saliente, el flujo del campo a través de S coincide con la integral triple de su divergencia en la región M de la que S es frontera. Las hipótesis pueden debilitarse, y la dimensión del espacio ampliarse, resultando teoremas más generales; puede verse una presentación introductoria en Lang, S. (1990). *Introducción al Análisis Matemático* (Primera edición. [Original 1968, Undergrauate Analysis] ed.). (M. López Mateos, & M. Muñoz Mella, Trads.) Wimington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana, Capítulo 20, Formas diferenciales, pp. 442-458.

[ix] Se acepta conocida la definición de que $\bar{\gamma}(t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\bar{f}(P)$ en el punto $P = \bar{\gamma}(t)$ sii $\bar{f}\left(\bar{\gamma}(t)\right) = \bar{\gamma}'(t)$, que puede verse en, por ejemplo, Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trads.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, Capítulo 3, Funciones con valores vectoriales, §3.3, Campos vectoriales, p.216, definición.



 Seguramente. el modo más sencillo de resolver este ejercicio consista en comprobar a simple vista que el flujo a través de los tres triángulos definidos en cada plano coordenado por las trazas del plano y los ejes coordenados es nulo, y como la divergencia del campo es constante (e igual a 5/2), el flujo es (por el teorema de la divergencia) esa constante por el volumen del tetraedro (que sabemos es la tercera parte de área de la base por la altura), de modo que el flujo puede calcularse efectuando la siguiente cuenta: $\iint_S \ \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \frac{5}{2}\,\frac{1}{3}\frac{1}{2}\,\frac{5}{2}\frac{5}{2}\ 5 = \frac{1}{3}(\frac{5}{2})^4 = \frac{625}{48}$, igual que antes.

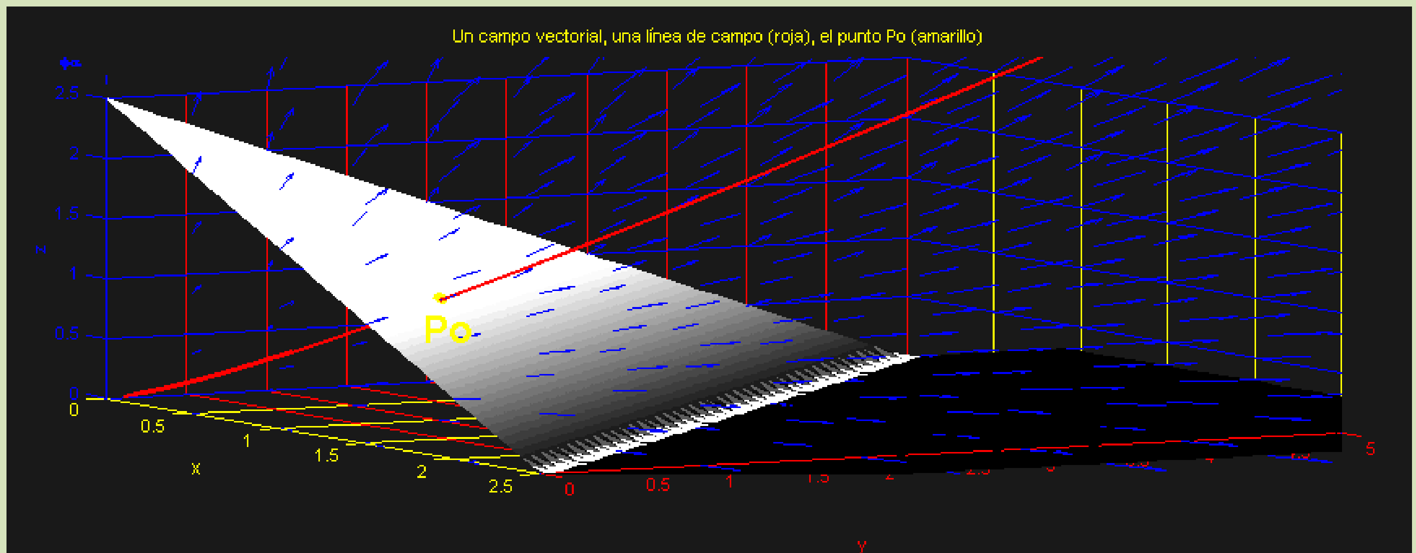


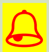
Ilustración 4. Las líneas de campo y el punto $P_o = (1, 1, 1)$ y el plano S

Ejercicio 4. Sea C la curva frontera, orientada positivamente, del recinto D, descripto en coordenadas polares (r, θ) por las inecuaciones $0 < r < 2\,(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta))$. Definir una función escalar h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la circulación de $\bar{f}$ sobre C, coincida con el área de D, siendo $\bar{f}(x, y) \overset{\text{def}}{=} \nabla h(x^2y) + (x\,e^x + 2\,x\,y,\ x\,h(x) - e^y \cos(y^3))$.

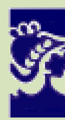
La curva C es un circunferencia centrada en $P_o = (1, 1)$ que pasa por el origen de coordenadas, pues $r = 2\,(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta))$ sii $0\ r^2 = 2\ \ r\,(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta))$ sii $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, esto es $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. De los dos sumandos de $\bar{f}$, sólo nos ocupamos del segundo, pues la circulación de $\nabla h(x^2y)$ es claramente nula, para cualquier h diferenciable[x]. De esta manera, la circulación resulta de la contribución del segundo miembro. Estando la curva C positivamente orientada[xi], y suponiendo que pudiéramos hallar una h de clase C^1 en $\mathbb{R}$, es claro que el campo vectorial $\bar{f}$ también será de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, de modo que podrá aplicarse el teorema de Green y escribir entonces, llamando $P(x, y) \overset{\text{def}}{=} x\,e^x + 2\,x\,y$, $Q(x, y) \overset{\text{def}}{=} x\,h(x) - e^y \cos(y^3)$

$$\int_C \bar{f} \cdot \overline{dl} = \iint_{\mathcal{R}} [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} [xh'(x) + h(x) - 2x]\ dx\,dy$$

Es suficiente[xii] que h sea una función derivable en $\mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación diferencial $xh'(x) + h(x) - 2x = 1$ para cumplir con el enunciado. La ecuación diferencial es $[x\,h(x)]' = 1 + 2\,x$, una de cuyas soluciones (la única definida en $\mathbb{R}$) es h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 1$. Lo verificamos: $\forall x \in \mathbb{R}$: $[x\,h(x)]' = [x\,(x+1)]' = [x^2 + x]' = 2x + 1$. Podemos entonces responder que *una* función que satisface el problema[xiii] es h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 1$.

 Nuevamente, decimos que h es la única solución de la ecuación diferencial que también satisface el enunciado, pero no es la única función que satisface el enunciado, desde que la ecuación diferencial resultó *una* manera (y no la única) de asegurarse que la circulación y el área coincidan. Para mostrar que hay otra podríamos buscar una función h_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal

[x] Se da por sabido que la circulación de un campo de gradientes sobre un lazo se anula, cuya prueba es directa conociendo el resultado de la independencia del modo en que se recorre el camino entre dos puntos.
[xi] De su regularidad no dudamos, basta la parametrización simple clásica $\bar{\gamma}(t) = (1 + a\cos(t), 1 + a\,\operatorname{sen}(t))$, con $a = \sqrt{2}$, $t \in [0, 2\pi)$, que la provee de la orientación necesaria, con $\bar{\gamma}'$ nunca nulo pues para todo t es $\|\bar{\gamma}'\| = a \neq 0$. La Inyectividad es también directa (probarla).
[xii] Y de ninguna manera *necesario*: es falso que debamos exigir esa condición para lograr que la circulación coincida con el área de la región. Existen infinitas funciones h que no cumplen la condición y sin embargo satisfacen el problema. La diferencia es que la función h que hallamos aquí, logra hacer que la circulación sobre *cualquier* lazo coincida con el área de su interior.
[xiii] Observamos que habíamos supuesto *a priori*, para aplicar el teorema de Green, la suavidad de h de primer orden. *A posteriori* podemos decir que la hipótesis se cumple con nuestra función h, dado que es $C^\infty(\mathbb{R})$.



que $h_1(x) = k$, con k a determinar de modo que ajuste el valor del área (siendo $\mathcal{R}$ un círculo de radio $\sqrt{2}$, es área($\mathcal{R}$) = 2π), esto es que debe cumplirse la siguiente condición:

$$\iint_{\mathcal{R}} [xh'(x) + h(x) - 2x]\ dx\ dy = \iint_{\mathcal{R}} [k - 2x]\ dx\ dy = 2\pi$$

El cálculo de la integral se simplifica si se observa que $k - 2x = k - 2 - 2(x - 1)$, y dado que la integral de $x - 1$ en $\mathcal{R}$ es nula (es el momento estático respecto a un eje baricéntrico), sólo queda la integral de la constante $k - 2$, que naturalmente es el producto de $k - 2$ por el área de $\mathcal{R}$, resulatando entonces $(k - 2)\, 2\pi = 2\pi$, de donde $k = 3$. Tenemos así otra función que satisface lo pedido: $h_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h_1(x) = 3$. De que hay infinitas es (casi) evidente[xiv].

Ejercicio 5. Hallar los puntos de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{xy + 1}\}$ más próximos al origen de coordenadas.

El dominio de la función z: $D_z \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x\,y + 1 \geq 0\}$. Debemos investigar los extremos de la función distancia $d(X, \bar{0}) = ||X||$. Dado que los extremos de $||X||$ y los de $||X||^2$ son los mismos[xv], trabajamos con la función de tres variables (ligadas) f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(X) = ||X||^2 = x^2 + y^2 + z^2$, sujeto a la restricción $X \in S$. Pero esto es lo mismo que que examinar los extremos del campo escalar de dos variables (libres) g : $D_z \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$. Para resolver este problema estudiamos primero los extremos en la frontera de D_z, esto es en el conjunto de nivel 0 de la función z, $\mathcal{C}(z, 0) = \partial D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y = -1\}$.

Es claro que ∂D_z, $= \{(t, -1/t),\ t \neq 0,\ t \in \mathbb{R}\}$, de modo que los extremos de g en ∂D_z, son los extremos de la función de una variable $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^2 + 1/t^2$, cuyo gráfico se muestra en la ilustración 4. El mínimo local de esta función escalar se alcanza en los puntos cuyas abscisas satisfacen $h'(t) = 2t - 2/t^3 = 0$, esto es $t_1 = -1$ o $t_2 = 1$ y su valor es 2. De esta manera, hemos encontrado que el campo escalar g alcanza el mínimo 2 en los puntos $A_1 = (1, -1)$, $A_2 = (-1, 1)$, lo que indica que, regresando al problema original, entre los puntos de S en los que $z = 0$, los que se hallan más próximos al origen son $P_1 = (1, -1, 0)$ y $P_2 = (-1, 1, 0)$, siendo tal distancia $\sqrt{2}$.

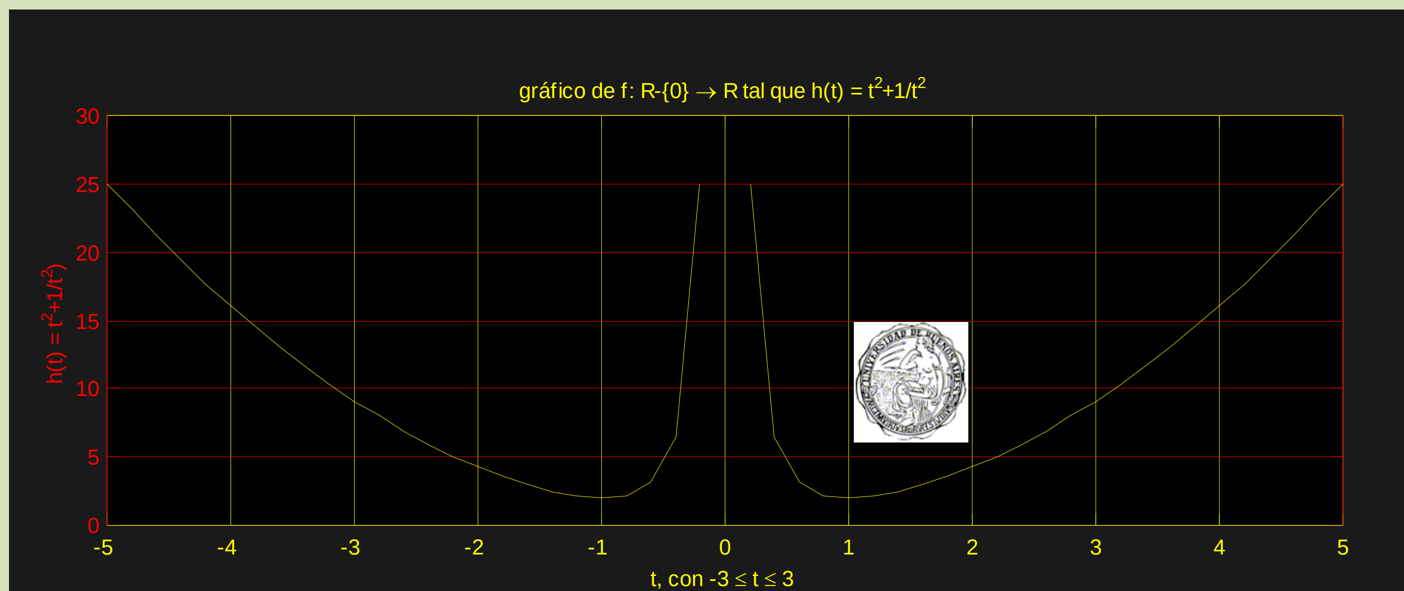


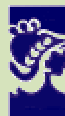
Ilustración 5. El gráfico de h: $\mathbb{R}$ -{0}→$\mathbb{R}$ tal que h(t) = $t^2 + t^{-2}$

Ahora es necesario averiguar lo que sucede en el resto de los puntos de S, esto es buscamos los mínimos de g en el interior de D_z, el conjunto abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x\,y + 1 > 0\}$, y resolviendo $\nabla g(x, y) = (2x + y, 2y + x) = (0, 0)$ sólo se tiene el punto $P_o = (0, 0)$ con un Hessiano $H_g(P_0) = det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, de modo que en el punto $M_0 = (0, 0, 1) \in S$ se tiene un mínimo de la distancia[xvi].

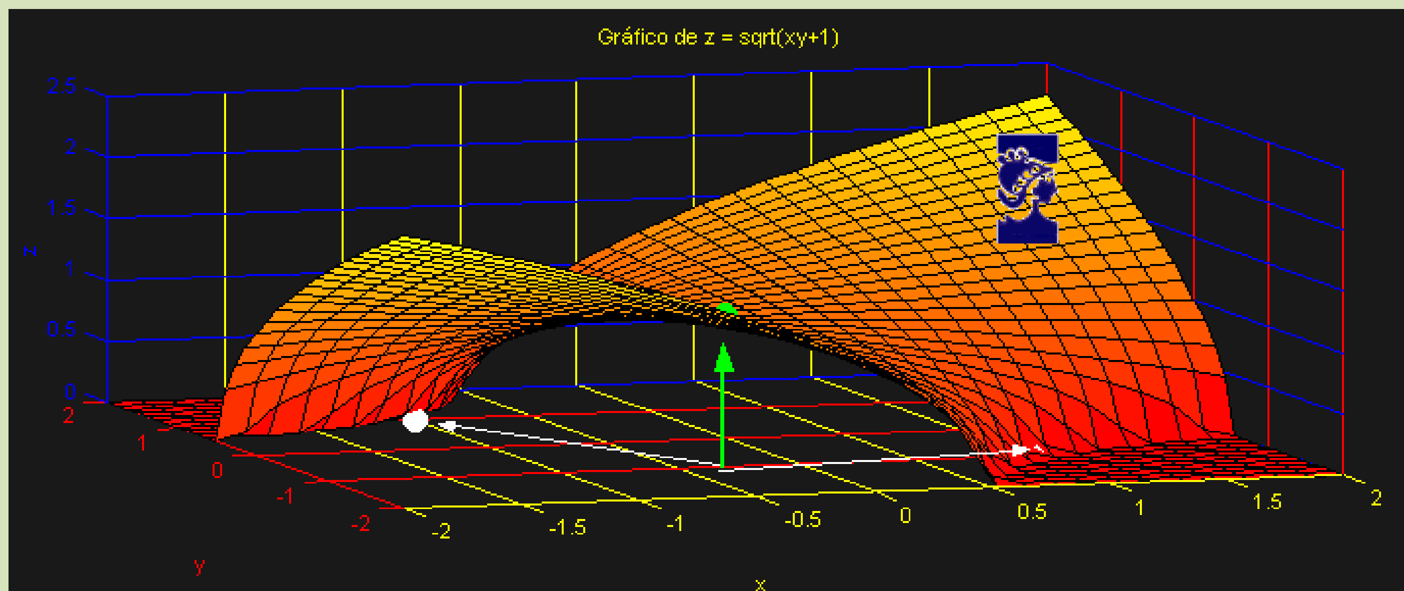
[xiv] Como ejercicio, comprobar que la función h_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h_1(x) = 3x/2$ también satisface el problema ¿podría dar una expresión explícita que muestre que, efectivamente, existen infinitas funciones que satisfacen el problema?

[xv] ¿por qué?

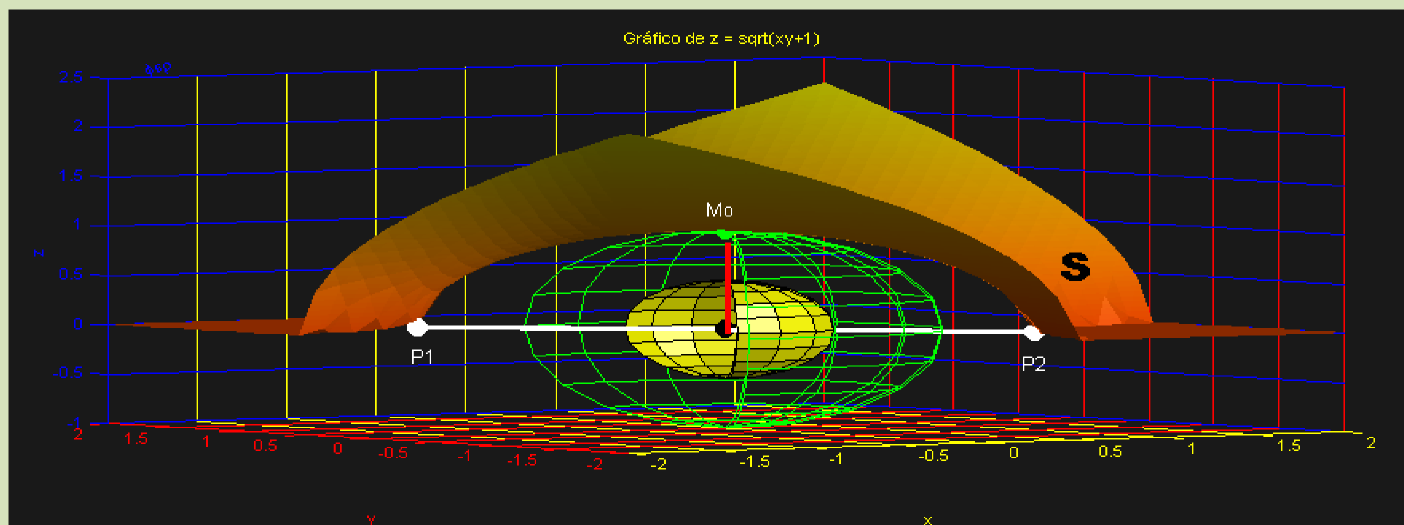
[xvi] Aquí suponemos conocido el resultado de que un campo escalar g de dos variable de clase C^2 en un punto interior P_o en el que se anula su gradiente tiene un extremo (de hecho, estricto) en ese punto si su hessiano en ese punto $H(P_o)$ es positivo; el extremo es mínimo si $D_{11}g(P_0)$ es negativa. Ver Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (Séptima edición ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz,



Finalmente, es preciso decidir cuál de estos tres puntos hallados (P_1, P_2 y M_0) es el que se halla más próximo. Dado que $d(M_0, \bar{0}) = 1 < d(P_1, \bar{0}) = d(P_2, \bar{0}) = \sqrt{2}$,, finalmente concluimos que M_o es el (único) punto má próximo al origen de coordenadas, y su distancia a él es 1. Eso es lo que ilustra el siguiente gráfico, donde se aprecian sobre la superficie los dos puntos P_1 y P_2 (color blanco) y el punto M_0 más próximo al origen (color verde), que le da el mínimo a la función f.



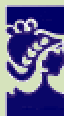
Tal vez sirva mencionar algo respecto de la dimensión de los espacios sobre los que se trabaja, pues parece haber resultado alguna confusión, a juzgar por algunas resoluciones. Es verdad que el ejercicio puede resolverse de un modo muy sencillo, observando lo que sucede con los conjuntos de nivel de la función a extremar y observando la relación que guardan con la restricción, ambos en el mismo espacio, naturalmente. El gráfico siguiente muestra las esferas (conjuntos de nivel, que van aumentando de tamaño hasta contactar por primera vez a la superficie restricción S en el punto M_o: allí está el mínimo, y asunto terminado.



---

§70.2, Teorema 1, p.205, o también Apostol, T. (1980). *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty] ed., Vol. II). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona: Reverté, §9.12, Teorema 9.7, p.380

El grado de regularidad suficiente para la validez de la afirmación es C^2, sin embargo, en algunos textos se pide C^3, lo que facilita la prueba; ver por ejemplo, Curtis, P. (1979). *Cálculo de varias variables con álgebra lineal* (Primera edición. Primera reimpresión [Original 1970: Multivariate Calculus with Linear Algebra] ed.). (M. C. Sangines de Salinas, & O. Mourut de Montpellier (revisora), Trads.) México D. F.: Limusa., Teorema 7.7, p. 329; Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trads.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, §4.2, Teorema 4, p.253. El teorema para un campo de dos variables, con regularidad C^2, se encuentra en un artículo de Lagrange de 1759, titulado *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, Cf. Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History* (Primera edición ed.). New York: Spinger-Verlag.Chapter I, Higher Derivatives and Taylor Series, Theorem 4.7, p. 324. La generalización a varias variables introduce el actual hessiano en el artículo de Otto Hesse de 1857: *Ueber die Criterien des Maximums und Minimus der einfachen Integrale*.



En este documento encuentran referencias de los siguientes textos, de los que sería deseable que cada uno de los alumnos tuviese, ciertamente, al menos uno. En las clases hemos hecho continua referencia al texto de Apostol y al de Marsden-Tromba.

📖 **Apostol, T.** (1980). *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty] ed., Vol. II). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona: Reverté.

📖 **Curtis, P.** (1979). *Cálculo de varias variables con álgebra lineal* (Primera edición. Primera reimpresión [Original 1970: Multivariate Calculus with Linear Algebra] ed.). (M. C. Sangines de Salinas, & O. Mourut de Montppellier (revisora), Trads.) México D. F.: Limusa.

📖 **Hairer, E., & Wanner, G.** (1996). *Analysis by its History* (Primera edición ed.). New York: Spinger-Verlag.

📖 **Lang, S.** (1990). *Introducción al Análisis Matemático* (Primera edición. [Original 1968, Undergrauate Analysis] ed.). (M. López Mateos, & M. Muñoz Mella, Trads.) Wimington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana.

📖 **Marsden, J. E., & Tromba, A. J.** (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trads.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana.

📖 **Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C.** (1968). *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (Séptima edición ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz.

📖 **Santaló, L.** (1993). *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (Décimocuarta edición ed.). Buenos Aires: Eudeba.

$\phi\alpha$